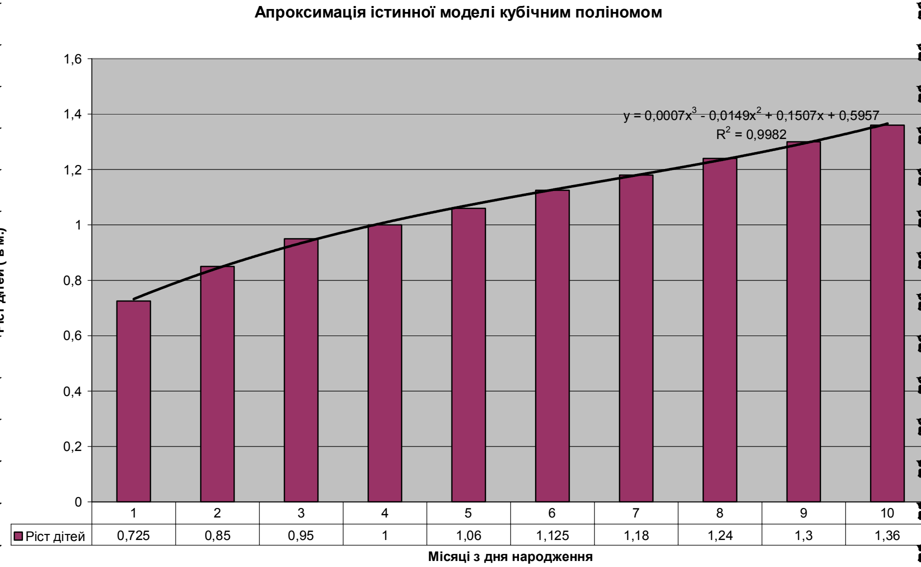
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука

О.М.Бернацька, О.С.Тимчук

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАЛЕЖНОСТІ РОСТУ ДИТИНИ ВІД ВІКУ І ЇЇ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ КАРЛО

Апроксимація поліномом третього степеня



Модель ППП 81-3

Науковий керівник:
кандидат технічних наук,
доцент Р. М. Літнарович

Рівне – 2009

УДК 37.015.2

Бернацька О.М.,Тимчук О.С. Побудова математичної моделі залежності росту дитини від віку і її дослідження методом статистичних випробувань Монте Карло.Апроксимація поліномом третього степеня.Модель ППП 81-14.Науковий керівник Р.М.Літнарович. МЕГУ, Рівне, 2008, 32 с.

Рецензент: С.В. ЛІСОВА, доктор педагогічних наук,професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор.

На основі фактичних даних залежності росту дитини від її віку побудована математична модель у вигляді поліному третього степеня по способу найменших квадратів.

В даній роботі генеруються середні квадратичні похибки, які приводяться до заданих нормованих, будується спотворена модель, зрівноважується по способу найменших квадратів. Знаходяться ймовірніші значення коефіцієнтів а, в с, d поліному третього степеня апроксимуючої математичної моделі.

Робиться оцінка точності і даються узагальнюючі висновки.

Примінений метод статистичних випробувань Монте Карло дав можливість провести широкомасштабні дослідження і набирати велику статистику.

Для студентів і аспірантів педагогічних вузів.

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕГУ

Зміст

Передмова

За результатами фактичних даних залежності росту дитини від віку, будується математична модель у вигляді поліному першого степеня.

Вихідними даними для проведення досліджень в даній роботі береться ріст дитини (Уі) в м. і її вік (Хі) в місяцях. Ці дані приймались як істинні і за ними будувалась математична модель у вигляді поліному третього степеня способом найменших квадратів.

Генерувались випадкові числа, знаходився коефіцієнт пропорційності K і дані випадкові числа приводилися до середньої квадратичної похибки 0,1 .

Будується спотворена модель, яка зрівноважується по способу найменших квадратів.

Дається оцінка точності елементів, зрівноважених процедурою способу найменших квадратів. Робляться узагальнюючі висновки.

Нам невідомі літературні джерела, де б проводились аналогічні дослідження.

Робота буде корисною для студентів і аспірантів педагогічних вузів, для вчителів і педагогів , медичних працівників.

1. Постановка проблеми дослідження

У відомій роботі Коцур Н.І.Основи педіатрії і гігієни дітей раннього та дошкільного віку [с.58] вказано, що зріст доношеної дитини при народженні коливається в середніх межах від 45 до 52 см. На кінець 1-го року життя зріст у середньому становить 70-75 см;другого – 85 см; третього – 95 см; шостого -110-115 см.

Протягом першого року життя (в середньому) :а) дитина виростає на 25 см; б) протягом другого – на 10 см;протягом п'я-того – на 7см; е) протягом шостого – на 5 см.

Середній зріст дитини старше року можна визначити за формулою:

$$У = 75см+(5см*n) \quad , \qquad (1,1)$$

де n – число років.

Так, у 6 років зріст повинен бути:

$$У_{6р.} = 75см + (5см*6)=105 см.$$

Зріст дитини можна визначити також за іншою формулою. У 4 роки зріст дитини становить 100 см. Якщо дитині менше 4 років, її зріст дорівнює

$$У_{<4р.} = 100см – 8(4-n) \;, \qquad (1.2)$$

де n – кількість років..

Якщо дитині більше 4 років, то її зріст дорівнює:

$$У_{>4р}= 100см+6(n-4) \quad , \qquad (1.3)$$

Різні частини тіла дитини ростуть неоднаково, найбільш інтенсивно – нижні кінцівки, довжина їх за весь період росту Збільшується у 5 разів, тим часом як довжина верхніх кінцівок – У 4 рази, тулуба – у 3 рази, а висота голови – у 2 рази. Голова новонародженої дитини становить близько ¼ довжини всього тіла, голова 6- річної дитини – 1/6 і дорослого – 1/8.

На основі приведених вище офіційних даних, нами була складена слідуюча таблиця

Таблиця 1,1. Залежність росту дитини від віку

Вік(роки)	Ріст(см) Ф-ла 1.1	Ріст(см) (1,2),(1.3)	Ріст(см)
1	**0,75**	0,76	**0,725**
2	**0,85**	0,84	**0,85**
3	**0,90**	0,92	**0,95**
4	**0,95**	1.00	**1,00**
5	**1,00**	1,06	**1,06**
6	**1,05**	1.12	**1,125**
7	**1,10**	1.18	**1,18**
8	**1,15**	1.24	**1,24**
9	**1,20**	1.30	**1,3**
10	**1,25**	1.36	**1,36**

В табл. 1.1 ріст дитини , розрахований за формулою (1.1), приве-дений у другому стовпчику, за формулами (1.2) і (1.3) приведе-ний у третьому стовпчику. В четвертому стовпчику, згідно статистичних даних, нормальний ріст дітей після першого року життя має бути:

$$У_1= 0,5(0,70+0,75)=0,725 \;,$$

після шостого року життя:

$$У_6= 0,5(1,10+1,15)=1,125 \;,$$

В подальшому, на основі даних табл.1. 1 (стовпч.4) і була побудована математична модель залежності ваги дитини від її віку і досліджена методом статистичних випробувань Монте Карло.

2. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло

У нашому випадку незалежні змінні представляються з точністю 0,1.

Тому логічно генерувати випадкові похибки з точністю, яка б дорівнювала 0,05, тобто половині шкали, з якою ми працюємо. Але, поставимо перед собою задачу ще дослідити математичні моделі з граничною точністю, яку приймемо вдвічі більшу за 0,05, тобто рівну 0,1.

Сучасні калькулятори мають «вшиті» генератори для генерування випадкових чисел від 0 до 1. Але вони генерують числа тільки зі знаком «плюс».

Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які приймемо в подальшому, як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо-випадкових) чисел $\xi_{cp.}$,

$$\xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} \qquad (2.1)$$

Де n – сума випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення істинних похибок Δ'_i за формулою

$$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp} \qquad (2.2)$$

3. Знаходять середню квадратичну похибку попередніх істинних похибок за формулою Гауса

$$m_{\Delta'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta'^2 i}{n}} \qquad (2.3)$$

4. Знаходять коефіцієнт пропорційності K, для визначення істинних похибок необхідності точності

$$\mathrm{K} = \frac{c}{m'_\Delta}, \qquad (2.4)$$

де c – необхідна константа.

Так, наприклад, при $m'_\Delta = 0{,}28$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $c = 0{,}1$, будемо мати

$\mathrm{K}_{0,1} = \dfrac{0{,}1}{0{,}28} = 0{,}357$, а при $c = 0{,}05$, отримаємо

$$\mathrm{K} = \frac{0{,}05}{0{,}28} = 0{,}178.$$

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta'_i \cdot \mathrm{K} \qquad (2.5)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_Δ генерованих істинних похибок Δ

$$m_\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta^2}{n}} \qquad (2.6)$$

і порівняння $m_\Delta = c$ (2.7)

Таблиця 2. Генерування псевдо-випадкових чисел і розрахунок істинних похибок

№	ξ_i	ξ_{cp}	$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp}$	$\Delta_i'^2$	$\Delta_i = \Delta'_i \cdot \mathrm{K}$	Δ_i^2
1	**0,18**	**0,474**	**-0,294**	**0,086436**	**-0,1588**	**0,02521176**
2	**0,39**	**0,474**	**-0,084**	**0,007056**	**-0,045**	**0,00205810**
3	**0,37**	**0,474**	**-0,104**	**0,010816**	**-0,0562**	**0,00315482**
4	**0,78**	**0,474**	**0,306**	**0,093636**	**0,165**	**0,02731187**
5	**0,47**	**0,474**	**-0,004**	**1,6E-05**	**-0,0022**	**0,00000467**
6	**0,24**	**0,474**	**-0,234**	**0,054756**	**-0,126**	**0,01597130**
7	**0,46**	**0,474**	**-0,014**	**0,000196**	**-0,0076**	**0,00005717**
8	**0,61**	**0,474**	**0,136**	**0,018496**	**0,073**	**0,00539494**
9	**0,5**	**0,474**	**0,026**	**0,000676**	**0,01404**	**0,00019718**
10	**0,74**	**0,474**	**0,266**	**0,070756**	**0,14366**	**0,02063820**
n=10	**4,74**	**Суми**	**0**	**0,34284**	**0,0E+00**	**0,10000000**

Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$\Delta'_m = \sqrt{\frac{0{,}34284}{10}} = 0{,}185$$

Коефіцієнт пропорційності $K = \dfrac{0{,}1}{0{,}185} = 0{,}540$.

Середня квадратична похибка при генеруванні випадкових чисел з точністю $c = 0{,}1$

$$m_{\Delta_i} = \sqrt{\frac{0{,}1000000}{10}} = 0{,}1$$

Таблиця 3. Побудова спотвореної моделі

№	Істинна модель		Δ_i	$x_{спотв.} = x_{іст.} + \Delta_i$
	$x_{іст}$	$y_{іст}$		
1	**1**	**0,725**	**-0,1588**	**0,841**
2	**2**	**0,85**	**-0,045**	**1,955**
3	**3**	**0,95**	**-0,0562**	**2,944**
4	**4**	**1**	**0,165**	**4,165**
5	**5**	**1,06**	**-0,0022**	**4,998**
6	**6**	**1,125**	**-0,126**	**5,874**
7	**7**	**1,18**	**-0,0076**	**6,992**
8	**8**	**1,24**	**0,073**	**8,073**
9	**9**	**1,3**	**0,01404**	**9,014**
10	**10**	**1,36**	**0,14366**	**10,144**
	55	**10,79**	**0,0E+00**	**55,000**

По даним спотвореної моделі виконують строге зрівноваження методом найменших квадратів і отримують ймовірнішу модель, роблять оцінку точності зрівноважених елементів і дають порівняльний аналіз.

3. Представлення системи нормальних рівнянь

У результаті проведеного експерименту ми маємо ряд результатів X_i, Y_i, функціональну залежність між якими будемо шукати за допомогою поліному степені К, де коефіцієнти a_i являються невідомими.

Тоді, система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned}
&na_0 + a_3[x] + a_2[x^2] + \ldots + a_m[x^m] - [y] = 0,\\
&a_0[x] + a_3[x^2] + a_2[x^3] + \ldots + a_m[x^{m+1}] - [xy] = 0,\\
&a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \ldots + a_m[x^{m+1}] - [x^2y] = 0, \qquad (3.1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \ldots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] = 0,
\end{aligned}$$

де знаком $[\ ]$ позначена сума відповідного елемента.
Для поліному третього порядку виду

$$y = ax^3 + вx^2 + cx + d \qquad (3.2)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned}
&dn + c[x] + в[x^2] + a[x^3] - [y] = 0,\\
&d[x] + c[x^2] + в[x^3] + a[x^4] - [xy] = 0,\\
&d[x^2] + c[x^3] + в[x^4] + a[x^5] - [x^2y] = 0,\\
&d[x^3] + c[x^4] + в[x^5] + a[x^6] - [x^3y] = 0.
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
&a[x^6] + в[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] = 0,\\
&a[x^5] + в[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] = 0,\\
&a[x^4] + в[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] = 0,\\
&a[x^3] + в[x^2] + c[x] + dn - [y] = 0.
\end{aligned}$$

В подальшому будемо рішати систему лінійних нормальних рівнянь (3.3) або (3.4) одним із відомих в математиці способів.

Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Приведемо розрахункову таблицю, на основі якої стримують коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 4. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь.

№	$x_{спотв}$	$y_{іст}$	x^0	x^2	x^3	x^4	x^5
1	**0,841**	**0,725**	1	0,708	0,59528575	0,501	0,421
2	**1,955**	**0,85**	1	3,821	7,46785942	14,597	28,532
3	**2,944**	**0,95**	1	8,666	25,51168498	75,102	221,088
4	**4,165**	**1**	1	17,349	72,2648810	301,002	1253,753
5	**4,998**	**1,06**	1	24,978	124,8380474	623,921	3118,255
6	**5,874**	**1,125**	1	34,499	202,6366838	1190,211	6990,852
7	**6,992**	**1,18**	1	48,894	341,8897253	2390,643	16716,425
8	**8,073**	**1,24**	1	65,181	526,2323191	4248,510	34300,138
9	**9,014**	**1,3**	1	81,253	732,4175218	6602,042	59511,086
10	**10,144**	**1,36**	1	102,894	1043,720114	10587,14	107392,369
Σ	**55,000**	**10,79**	10	388,243	3077,574123	26033,67	229532,919

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Продовження таблиці 4

№	x^6	xy	x^2y	x^3y
1	0,354	0,609883	0,513044	0,431582
2	55,769	1,661439	3,247504	6,347681
3	650,846	2,796641	8,23284	24,2361
4	5222,213	4,165263	17,34942	72,26488
5	15584,54	5,29771	26,47711	132,3283
6	41061,63	6,607825	38,81187	227,9663
7	116888,58	8,251078	57,69516	403,4299
8	276920,45	10,01108	80,82394	652,5281
9	536435,43	11,71825	105,6288	952,1428
10	1089351,68	13,79538	139,9356	1419,459
Σ	2082171,49	64,915	478,715	3891,135

Параметр S розраховуються за формулою

$$S = x + x^2 + x^3 + x^0 - y. \qquad (4.1)$$

Таким чином, на основі проведених розрахунків нами отримана наступна система нормальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&10d + 55.0c + 388{,}243b + 3077{,}574123a - 10{,}79 = 0,\\
&55{,}0d + 388{,}243c + 3077{,}574123b + 26033{,}67a - 64{,}915 = 0,\\
&388{,}243d + 3077{,}574123c + 26033{,}67b + 229532{,}919a - 478{,}715 = 0,\\
&3077{,}574123d + 26033{,}67c + 229532{,}919b + 208217{,}149a - 3891{,}135 = 0,
\end{aligned} \qquad (4.2)
$$

або

$$
\begin{aligned}
&208217{,}149a + 229532{,}919b + 26033{,}67c + 3077{,}574123d - 3891{,}135 = 0,\\
&229532{,}919a + 26033{,}67b + 3077{,}574123c + 388{,}243d - 478{,}715 = 0,\\
&26033{,}67a + 3077{,}574123b + 388{,}243c + 55{,}0d - 64{,}915 = 0,\\
&3077{,}574123a + 388{,}243b + 55{,}0c + 10d - 10{,}79 = 0.
\end{aligned} \qquad (4.3)
$$

5. Рішення системи лінійних рівнянь способом Крамера

Нехай, маємо систему лінійних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_{1n} = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned} \qquad (5.1)
$$

Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі c, складемо із коефіцієнтів при невідомих визначник Δ, який називається визначником системи рівнянь (5.1).

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.2)
$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (5.2) на x_i. В лівій частині будемо мати Δx_i, в правій же частині введемо у всі члени i-го стовпчика визначника $a_К$ і множник x_i

$$
\Delta \cdot x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1i}x_i \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2i}x_i \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & \ldots a_{ni}x_i \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.3)
$$

Потім до i-го стовпчика визначника (5.3) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Величина визначника від цього не зміниться. Тоді i-стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (5.1).

Замінимо його вільними членами цієї системи і позначимо через Δ_i

$$
\Delta \cdot x_i = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & \ldots b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.4)
$$

$$
\text{Звідки, } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & \ldots b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots a_{n1} & \ldots a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}. \qquad (5.5)
$$

Формула (5.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (5.1).

Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона буде системою лінійних однокорінних рівнянь.

Система лінійних одно корінних рівнянь може мати рішення відмінне від нульового, якщо визначник системи Δ рівний нулю.

Для системи чотирьох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4, \end{aligned} \tag{5.6}$$

якщо визначник системи Δ не дорівнює нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5.7}$$

то система визначника і по Крамеру її невідомі виражаються формулами

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{5.8}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_3 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{5.9}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{5.10}$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{5.11}$$

Як бачимо, що

$$\Delta_{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{5.12}$$

$$\Delta_{x_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_3 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{5.13}$$

$$\Delta_{x_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad (5.14)$$

$$\Delta_{x_4} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\Delta}. \qquad (5.15)$$

Приведемо формулу знаходження визначника четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{23}a_{43} - a_{33}a_{42})(a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}) +$$

$$+ (a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) +$$

$$+ (a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) +$$

$$+ (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) +$$

$$+ (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) +$$

$$+ (a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \qquad (5.16)$$

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

І в нашому випадку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2082171{,}49 & 229532{,}919 & 26033{,}672 & 3077{,}574 \\ 229532{,}919 & 26033{,}672 & 3077{,}574 & 388{,}243 \\ 26033{,}672 & 3077{,}574 & 388{,}243 & 55 \\ 3077{,}574 & 388{,}243 & 55 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 1934285317$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3891{,}135 & 229532{,}919 & 26033{,}672 & 3077{,}574 \\ 478{,}715 & 26033{,}672 & 3077{,}574 & 388{,}243 \\ 64{,}915 & 3077{,}574 & 388{,}243 & 55{,}000 \\ 10{,}79 & 388{,}243 & 55{,}000 & 10 \end{vmatrix} = 1017692{,}96,$$

тоді невідомий коефіцієнт a при x^3 буде

$$a = x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{1017692{,}96}{1934285317} = 0{,}000526134;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2082171{,}49 & 3891{,}135 & 26033{,}672 & 3077{,}574 \\ 229532{,}919 & 478{,}715 & 3077{,}574 & 388{,}243 \\ 26033{,}672 & 64{,}915 & 388{,}243 & 55 \\ 3077{,}574 & 10{,}790 & 55 & 10 \end{vmatrix} = \text{-}21219271{,}0,$$

тоді невідомий коефіцієнт b при x^2 буде

$$b = x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-21219271{,}0}{1934285317} = -0{,}01097008;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2082171{,}49 & 229532{,}919 & 3891{,}135 & 3077{,}574 \\ 229532{,}919 & 26033{,}672 & 478{,}715 & 388{,}243 \\ 26033{,}672 & 3077{,}574 & 64{,}915 & 55 \\ 3077{,}574 & 388{,}243 & 10{,}79 & 10 \end{vmatrix} = 250731378{,}6,$$

і невідомий коефіцієнт c при x буде

$$c = x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{250731378{,}6}{1934285317} = 0{,}129625;$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} 2082171{,}5 & 229532{,}919 & 26033{,}672 & 3891{,}135 \\ 229532{,}919 & 26033{,}672 & 3077{,}574 & 478{,}715 \\ 26033{,}672 & 3077{,}574 & 388{,}243 & 64{,}915 \\ 3077{,}574 & 388{,}243 & 55 & 10{,}79 \end{vmatrix} = 1218692571,$$

коефіцієнт d буде

$$d = \frac{\Delta_{x_4}}{\Delta} = \frac{1218692571}{1934285317} = 0{,}630047987.$$

Таким чином, на основі проведених досліджень, математична модель залежності росту дітей y_i від їх віку x_i виражається формулою

$$y = 0{,}0005261x^3 - 0{,}010970x^2 + 0{,}129625x + 0{,}630048 \quad (5.17)$$

6. Контроль зрівноваження

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів $a, в, c, d$ у формулу (4.3), отримаємо наступні результати.

Таблиця 5. Коефіцієнти нормальних рівнянь і контроль зрівноваження.

	$x^3]$	$x^2]$	$x]$	$x^0]$	y	Контроль
$[x^3$	2082171,49	229532,919	26033,672	3077,574	3891,135	3891,135
$[x^2$	229532,919	26033,672	3077,574	388,243	478,715	478,715
$[x$	26033,672	3077,574	388,243	55	64,915	64,915
$[x^0$	3077,574	388,243	55	10	10,79	10,79
	0,0005261	-0,010970	0,129625	0,630048		
	Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.	b	c	d		

7. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Середні квадратичні похибки визначаємих x_1, x_2, x_3, x_4 розраховуються за формулами:

$$m_{x_1} = \mu\sqrt{\frac{A_{11}}{\Delta}}, \quad (7.1)$$

$$m_{x_2} = \mu\sqrt{\frac{A_{22}}{\Delta}}, \quad (7.2)$$

$$m_{x_3} = \mu\sqrt{\frac{A_{33}}{\Delta}}, \quad (7.3)$$

$$m_{x_4} = \mu\sqrt{\frac{A_{44}}{\Delta}}, \quad (7.4)$$

де $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}, m_{x_4}$ – середні квадратичні похибки визначаємих невідомих x_1, x_2, x_3, x_4, μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, яка розраховується за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-K}} \qquad (7.5)$$

У формулі (7.5) n - число початкових рівнянь, K - степінь поліному. В нашому випадку $n = 10; K = 3$. V - різниця між вихідним значенням y_i і вирахуваним значенням y' за отриманою нами, формулою (5.17);

$$V_i = y_i - y_i' \qquad (7.6)$$

$A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – алгебраїчні доповнення першого, другого, третього і четвертого діагональних елементів

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (7.7)$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (7.8)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (7.9)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (7.10)$$

де $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$. (7.11)

Приведемо формулу розкриття визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

(7.12)

І в нашому випадку отримаємо

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 26033{,}672 & 3077{,}574 & 388{,}243 \\ 3077{,}574 & 388{,}243 & 55 \\ 388{,}243 & 55 & 10 \end{vmatrix} = 519701,$$

величина оберненої ваги

$$\frac{1}{P_{x_1}} = \frac{A_{11}}{\Delta} = \frac{519701}{1934285317} = 0{,}000268679, \text{ а } \sqrt{\frac{1}{P_{x_{11}}}} = 0{,}016.$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2082171{,}49 & 26033{,}672 & 3077{,}574 \\ 26033{,}672 & 388{,}243 & 55 \\ 3077{,}57 & 455{,}000 & 10 \end{vmatrix} = 1{,}44E+08,$$

$$\frac{1}{P_{x_2}} = \frac{A_{22}}{\Delta} = \frac{1{,}44E+08}{1934285317} = 0{,}074; \quad \sqrt{\frac{1}{P_{x_{22}}}} = 0{,}272.$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2082171{,}49 & 229532{,}92 & 3077{,}574 \\ 229532{,}919 & 26033{,}672 & 388{,}243 \\ 3077{,}574 & 388{,}243 & 10 \end{vmatrix} = 3{,}2972\text{E}+09,$$

$$\frac{1}{P_{x_3}} = \frac{A_{33}}{\Delta} = \frac{3{,}2972\text{E}+09}{1934285317} = 1{,}705; \quad \sqrt{\frac{1}{P_{x_{33}}}} = 1{,}306.$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 26033{,}672 & 3077{,}574 & 388{,}243 \\ 3077{,}574 & 388{,}243 & 55 \\ 388{,}243 & 55 & 10 \end{vmatrix} = 519701,$$

$$\frac{1}{P_{x_4}} = \frac{A_{44}}{\Delta} = \frac{5{,}6243\text{E}+09}{1934285317} = 2{,}908\,; \quad \sqrt{\frac{1}{P_{x_{44}}}} = 1{,}705.$$

Підставляючи у виведену нами, формулу (5.17) значення X спотвореної моделі отримаємо розрахункові значення y', які будуть дещо відрізнятися від вихідних значень Y.

Таблиця 6. порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№	$x_{спотв}$	$y_{іст}$	$y'_{зрівноваж}$	$V = y_i - y'_i$	V^2
1	**0,841**	**0,725**	0,7316	-0,00664	4,41E-05
2	**1,955**	**0,85**	0,8454	0,00457	2,085E-05
3	**2,944**	**0,95**	0,93	0,02	0,0004002
4	**4,165**	**1**	1,0177	-0,01767	0,0003121
5	**4,998**	**1,06**	1,0696	-0,00956	9,136E-05
6	**5,874**	**1,125**	1,1196	0,00543	2,951E-05
7	**6,992**	**1,18**	1,1799	5,2E-05	2,716E-09
8	**8,073**	**1,24**	1,2384	0,0016	2,562E-06
9	**9,014**	**1,3**	1,2925	0,00751	5,641E-05
10	**10,144**	**1,36**	1,3653	-0,0053	2,81E-05
n=10	**55,000**	**10,79**	10,79	0,000	0,001

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги буде

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-\text{K}}} = \sqrt{\frac{0{,}001}{7}} = 0{,}012.$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

$$m_a = \mu\sqrt{\frac{1}{P_a}} = 0{,}012 * 0{,}016 = 0{,}0002.$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$m_b = \mu\sqrt{\frac{1}{P_b}} = 0{,}012 * 0{,}272 = 0{,}003.$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c

$$m_c = \mu\sqrt{\frac{1}{P_c}} = 0{,}012 * 1{,}306 = 0{,}016.$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu\sqrt{\frac{1}{P_d}} = 0{,}012 * 1{,}705 = 0{,}020.$$

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції mφ=

0,010863
0,006563
0,006803
0,006353
0,005715
0,005676
0,006521
0,006796
0,006522

0,010913

Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

1. Генеровані випадкові числа, які приведено до нормованої досліджуваної точності.
2. На основі істинної моделі і генерованих істинних похибок побудована спотворена модель залежності росту дітей від їх віку.
3. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
4. Отримана формула

$$y = 0{,}0005261x^3 - 0{,}010970x^2 + 0{,}129625x + 0{,}630048$$

   залежності росту дітей Y від їх віку X.

5. Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження складає μ=0,012 метра.
6. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a при x^3 $m_a = 0{,}0002;$
   - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b при x^2 $m_b = 0{,}003;$
   - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c при x $m_c = 0{,}016;$
   - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d при $m_d = 0{,}020.$

   середні квадратичні похибки зрівноваженої функції mφ=
   -

0,010863
0,006563
0,006803
0,006353
0,005715
0,005676
0,006521
0,006796
0,006522
0,010913

7. Розроблена методика підготовки істинних похибок наперед заданої точності.
8. Дана робота відкриває дорогу для проведення досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
9. Вона дає можливість охопити велику аудиторію, тому що генеруються похибки індивідуально і вони не повторюються в других моделях.
10. Робота виконується вперше. Нам не відомі літературні джерела, де б виконувались аналогічні дослідження в психології.

Література

- Максименко С.Д., Е.Л. Носенко. Експериментальна психологія (дидактичний тезаурус). Навчальний посібник. - К: МАУП, 2004,-128 с.
- Літнарович Р.М. Основи математики. Дослідження впливу ситуативної тривожності на характеристики пам'яті. Навчальний посібник для студентів педагогічного факультету. Частина 2. МЕГУ, Рівне,2006, - 27 с.
- Літнарович Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психологічного експерименту логарифмічною функцією. Частина 3. МЕГУ, Рівне,2006, - 19 с.
- Літнарович Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту експоненціальною функцією. Частина 4. МЕГУ, Рівне, 2006, -17 с.
- Літнарович Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту

степеневою функцією. Частина 5. МЕГУ, Рівне, 2006, -17 с.

Додатки

Додаток 1.Генерування псевдовипадкових чисел, підпорядкування їх нормальному закону розподілу і розрахунок істинних похибок

0,18	0,474	-0,294	0,086436	-0,1588	0,02521176
0,39	0,474	-0,084	0,007056	-0,045	0,00205810
0,37	0,474	-0,104	0,010816	-0,0562	0,00315482
0,78	0,474	0,306	0,093636	0,165	0,02731187
0,47	0,474	-0,004	1,6E-05	-0,0022	0,00000467
0,24	0,474	-0,234	0,054756	-0,126	0,01597130
0,46	0,474	-0,014	0,000196	-0,0076	0,00005717
0,61	0,474	0,136	0,018496	0,073	0,00539494
0,5	0,474	0,026	0,000676	0,01404	0,00019718
0,74	0,474	0,266	0,070756	0,14366	0,02063820
4,74	Суми	0	0,34284	0,0E+00	0,10000000
A	B	C	D	E	F

Додаток 2. Побудова спотвореної моделі

1	0,725	-0,1588	0,841
2	0,85	-0,045	1,955
3	0,95	-0,0562	2,944
4	1	0,165	4,165
5	1,06	-0,0022	4,998
6	1,125	-0,126	5,874
7	1,18	-0,0076	6,992
8	1,24	0,073	8,073
9	1,3	0,01404	9,014
10	1,36	0,14366	10,144
55	10,79	0,0E+00	55,000
G	H	E	I

Хіст.	Уіст.	Істинні похиб.	Хспотв.

Додаток 3. Розрахункова таблиця

0,841	1	0,708	5280,59575	0,501	0,421	0,354
1,955	1	3,821	7,46785942	14,597	28,532	55,769
2,944	1	8,666	25,51168498	75,102	221,088	650,846
4,165	1	17,349	72,2648810	301,002	1253,753	5222,213
4,998	1	24,978	124,8380474	623,921	3118,255	15584,54
5,874	1	34,499	202,6366838	1190,211	6990,852	41061,63
6,992	1	48,894	341,8897253	2390,643	16716,425	116888,58
8,073	1	65,181	526,2323191	4248,510	34300,138	276920,45
9,014	1	81,253	732,4175218	6602,042	59511,086	536435,43
10,144	1	102,894	1043,720114	10587,14	107392,369	1089351,68
55,000	10	388,243	3077,574123	26033,67	229532,919	2082171,49
I	J	K	L	M	N	O
Хспотв.	X0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6

Продовження розрахункової таблиці

0,609883	0,513044	0,431582	0,7316	-0,00664	4,41E-05
1,661439	3,247504	6,347681	0,8454	0,00457	2,085E-05
2,796641	8,23284	24,2361	0,93	0,02	0,0004002
4,165263	17,34942	72,26488	1,0177	-0,01767	0,0003121
5,29771	26,47711	132,3283	1,0696	-0,00956	9,136E-05
6,607825	38,81187	227,9663	1,1196	0,00543	2,951E-05
8,251078	57,69516	403,4299	1,1799	5,2E-05	2,716E-09
10,01108	80,82394	652,5281	1,2384	0,0016	2,562E-06
11,71825	105,6288	952,1428	1,2925	0,00751	5,641E-05

3,79538	139,9356	1419,459	1,3653	-0,0053	2,81E-05
64,915	478,715	3891,135	10,79	0,000	0,00099
P	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**
YX	**YX^2**	**YX^3**	**Yзрівн.**	**V=Yi-Yз**	**VV**

Додаток 4. Розрахунок визначників

2082171,49	229532,919	26033,672	3077,574
229532,919	26033,672	3077,574	388,243
26033,672	3077,574	388,243	55
3077,574	388,243	55	10
D=	1934285317		

3891,135	229532,919	26033,672	3077,574
478,715	26033,672	3077,574	388,243
64,915	3077,574	388,243	55,000
10,79	388,243	55,000	10
D1=	1017692,96		

2082171,49	3891,135	26033,672	3077,574
229532,919	478,715	3077,574	388,243
26033,672	64,915	388,243	55
3077,574	10,790	55	10
D2=	-21219271,0		

2082171,49	229532,919	3891,135	3077,574
229532,919	26033,672	478,715	388,243
26033,672	3077,574	64,915	55
3077,574	388,243	10,79	10
D3=	250731378,6		

2082171,5	229532,919	26033,672	3891,135

229532,919	26033,672	3077,574	478,715
26033,672	3077,574	388,243	64,915
3077,574	388,243	55	10,79
D4=	1218692571		

Додаток 5. Вільні члени нормальних рівнянь

3891,135
478,715
64,915
10,79

Додаток 6. Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному

a=D1/D=	0,0005261
b=D2/D=	-0,010970
c=D3/D=	0,129625
d=D4/D=	0,630048
Y=aX^3+bX^2+cX+d	

Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень.

$$y = 0{,}0005261x^3 - 0{,}010970x^2 + 0{,}129625x + 0{,}630048$$

Додаток 7. Знаходження алгебраїчних доповнень

A44=	5,6243E+09	2082171,49	229532,92	26033,67
		229532,919	26033,672	3077,574
		26033,672	3077,574	388,243

A22=	1,44E+08	2082171,49	26033,672	3077,574
		26033,672	388,243	55
		3077,574	55,000	10

A33=	3,2972E+09	2082171,49	229532,92	3077,574
		229532,919	26033,672	388,243
		3077,574	388,243	10

		26033,672	3077,574	388,243
A11=	519701	3077,574	388,243	55
		388,243	55	10

Додаток 8. Контроль зрівноваження

[yy]-	α[yx^3]-	b[yx^2]	- c[yx] -	d[y]	=	0,000985
					[VV] =	0,000985
					Різниця=	0,000000

Додаток 9. Оцінка точності зрівноважених елементів

Середня	квадратична похибка одиниці ваги
μ=	0,011863
Середня	квадратична похибка коефіцієнта а
ma=	0,000194
Середня квадратична похибка коефіцієнта в	
mb=	0,003235
Середня квадратична похибка коефіцієнта с	
mc=	0,015489
Середня квадратична похибка коефіцієнта d	
md=	0,020229

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції mφ=

0,010863
0,006563
0,006803
0,006353

0,005715
0,005676
0,006521
0,006796
0,006522
0,010913

Ольга Миколаївна Бернацька
Ольга Сергіївна Тимчук

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАЛЕЖНОСТІ РОСТУ ДИТИНИ ВІД ВІКУ І ЇЇ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ КАРЛО

Апроксимація поліномом третього степеня

Наукове видання

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕГУ

Науковий керівник – кандидат технічних наук, доцент <u>Літнарович Руслан Миколайович</u>

Комп'ютерний набір, верстка – дизайн у редакторі Microsoft® Office 2003® Word

О.М.Бернацька,О.С.Тимчук

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ Ім.акад. С.Дем'янчука

Кафедра Математичного моделювання

33027, м. Рівне, вул.акад.С.Дем’янчука, 4